Question 1 *a) On considère deux espaces métriques* (E, d) *et* (F, δ)*. Rappeler la définition d'une isométrie de* E *dans* F*.*

b) Soit $\overrightarrow{E}$ *un espace vectoriel euclidien. Peut-on dire qu'une application* $u : \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{E}$*, de* $\overrightarrow{E}$ *dans lui-même, est une isométrie (au sens de la définition donnée en a)) si et seulement si c'est une application orthogonale ? Préciser.*

Réponse 1 a) Par définition, une isométrie de E dans F est une *bijection* f de E dans F qui conserve les distances, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall x, y \in E \quad \delta\left(f(x), f(y)\right) = d\left(x, y\right).$$

b) • Rappelons qu'une application orthogonale de $\overrightarrow{E}$ est une application $u : \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{E}$ qui *conserve le produit scalaire*, ou, ce qui revient au même, qui est *linéaire* et *conserve la norme*[1]. La distance entre deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$ est $d\left(x, y\right) = ||x - y||$. Elle est induite par la norme euclidienne de $\overrightarrow{E}$, et l'on rappelle que cette norme provient d'un produit scalaire $(.|.)$.
Si u est une application orthogonale, on sait que u est bijective, et comme

$$\forall x, y \in \overrightarrow{E} \quad d(u(x), u(y)) = ||u(x) - u(y)|| = ||x - y|| = d\left(x, y\right),$$

on peut affirmer que u est une isométrie de $\overrightarrow{E}$.
Mais la réciproque est fausse. En effet une translation de $\overrightarrow{E}$, de vecteur a, est une isométrie puisqu'elle est bijective et vérifie :

$$\forall x, y \in \overrightarrow{E} \quad d\left(x + a, y + a\right) = ||x - y|| = d\left(x, y\right).$$

Mais ce n'est pas une application orthogonale de $\overrightarrow{E}$ puisqu'elle n'est pas linéaire (elle ne transforme pas le vecteur nul en le vecteur nul !).

• *Pour aller plus loin* : De façon générale, on connaît bien le résultat suivant :

> **Théorème** : Si E désigne un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, une application $f : E \rightarrow E$ est une isométrie (i.e. est une application qui conserve les distances) si et seulement si c'est une application affine de partie linéaire une application orthogonale de $\overrightarrow{E}$.

[1] Toutes les propriétés concernant les applications orthogonales ou les isométries affines utilisées dans cette réponse sont des fondamentaux à connaître et à savoir démontrer lors d'un oral de concours. Si vous devez réviser ces points, faites-le en priorité, par exemple sur mon "Cours de géométrie" [1] ou dans les "Fondamentaux de géométrie" [2].

Munissons l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de sa structure affine canonique. Notons $\overrightarrow{E}_a$ l'espace affine ainsi obtenu (pour le distinguer de $\overrightarrow{E}$, mais les éléments de $\overrightarrow{E}$ et de $\overrightarrow{E}_a$ sont les mêmes : ce sont des vecteurs). La structure affine de $\overrightarrow{E}_a$ est donnée par l'action du groupe $(\overrightarrow{E},+)$ sur $\overrightarrow{E}_a$ suivante :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{E}_a \times \overrightarrow{E} & \rightarrow & \overrightarrow{E}_a \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

où $x+y$ est notre bien vieille addition vectorielle dans $\overrightarrow{E}$.
Retournons à notre problème : compte tenu du Théorème que l'on a rappelé, les isométries de $\overrightarrow{E}$ sont les isométries de $\overrightarrow{E}_a$, ce sont donc les applications affines de $\overrightarrow{E}_a$ dont la partie linéaire est une application orthogonale.
Ce sont donc des applications f telles qu'il existe une application orthogonale l de $\overrightarrow{E}$ telle que :

$$\forall x \in \overrightarrow{E} \quad f(x) = f(0) + l(x-0) = f(0) + l(x).$$

Une isométrie de $\overrightarrow{E}$ s'écrit donc $f = t_{f(0)} \circ l$ où $t_{f(0)}$ est la translation de vecteur $f(0)$ et l une application orthogonale de $\overrightarrow{E}$, et TOUTES les isométries de $\overrightarrow{E}$ sont de cette forme.

Remarques : α) On sait qu'une application orthogonale est aussi appelée une "*isométrie vectorielle*". On peut donc dire qu'une isométrie vectorielle de $\overrightarrow{E}$ est une isométrie de $\overrightarrow{E}$ qui est aussi une application linéaire[2].

β) Dans le langage parlé, on fait souvent l'abus de dire "isométrie" à la place de "application orthogonale" ou "isométrie vectorielle". C'est que l'on sous-entend le caractère linéaire de l'isométrie. On ne devrait pas, mais c'est ainsi !

References

[1] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[2] D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.

[2] Ceci donne tout son sens à l'adjectif : "vectorielle".